# 5. Der Satz von Shidlovskii über E-Funktionen

Tobias Boelter

Seminar über Irrationalität und Transzendenz

Freitag, 30. Mai 2014

- Grundlage des Vortrages ist das Buch *Algebraic Independence* von Yuri V. Nesterenko, Narosa, 2009.
- Nesterenko (*1946) ist russischer Zahlentheoretiker
- Seit 1992 Professor an der staatlichen Universität Moskau
- Bekannt für den Beweis, dass $\pi$ und $e^{\pi}$ algebraisch unabhängig sind
- promovierte unter Andrei Shidlovskii
- Shidlovskii erweiterte C.L. Siegels Theorie zu E-Funktionen
- Der Satz von Shidlovskii besagt, dass Werte bestimmter algebraisch unabhängiger E-Funktionen algebraisch unabhängig sind.

## Gliederung

### Definition 5.1

Ein **(algebraischer) Zahlkörper** $K$ ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ d.h. $K$ ist Körper, $\mathbb{Q} \subset K$ und $dim_{\mathbb{Q}} K < \infty$.

### Bemerkung 5.1

- Ein Zahlkörper $K$ ist als endliche Erweiterungen stets auch algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$.
- $K$ ist zudem immer eine einfache Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$
- d.h. $K = \mathbb{Q}(\xi)$ für eine algebraische Zahl $\xi$.

### Beispiel 5.2

- $\mathbb{R}$ ist Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, aber $dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.
- Der Körper $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen ist kein Zahlkörper.
- $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind Zahlkörper vom Grad 2.

**Definition 5.2**

Ein Element $x \in K$ eines Zahlkörpers $K$ wird **ganz** genannt, falls es Nullstelle eines normierten Polynoms $p \in \mathbb{Z}[x]$ ist.

Die ganzen Zahlen bilden einen Unterring, den **Ganzheitsring** $\mathbb{Z}_K$

**Definition 5.3**

Für eine algebraische Zahl $a \in \mathbb{A}$ definieren wir

$$|\overline{a}| \overset{def}{=} \max\{|x| : m_a(x) = 0\}$$

wobei $m_a \in \mathbb{Q}[x]$ das Minimalpolynom mit $m_a(a) = 0$ ist.

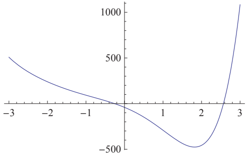
## Beispiel 5.3

```
MinimalPolynomial[-1 + ∛10 + √2, x]
```

Out[68]= $-41 - 174\,x - 69\,x^2 - 24\,x^3 + 9\,x^4 + 6\,x^5 + x^6$

In[69]:= `Plot[-41 - 174 x - 69 x^2 - 24 x^3 + 9 x^4 + 6 x^5 + x^6, {x, -3, 3}]`

Out[69]=




In[74]:= `NSolve[-41 - 174 x - 69 x^2 - 24 x^3 + 9 x^4 + 6 x^5 + x^6 == 0, x, Complexes]`

Out[74]= {{x → −3.49143 − 1.8658 ⅈ}, {x → −3.49143 + 1.8658 ⅈ}, {x → −0.663004 − 1.8658 ⅈ},
{x → −0.663004 + 1.8658 ⅈ}, {x → −0.259779}, {x → 2.56865}}

In[80]:= `Sort[Abs[x /. %74], Greater]`

Out[80]= {3.9587, 3.9587, 2.56865, 1.98009, 1.98009, 0.259779}

In[81]:= `N[Abs[-1 + ∛10 + √2]]`

Out[81]= 2.56865

### Definition 5.4 (Landau-Notation)

Für Funktionen $g, f$ schreiben wir

$$g = \mathcal{O}(f)$$

falls

$$\exists\, c, n_0 > 0 \quad \forall x > n_0 : g(x) < c\, f(x)$$

### Beispiel 5.4

$5n^2 + 7n + 100 = \mathcal{O}(n^2)$

## Gliederung

- Wiederholung einiger Definitionen
- **E-Funktionen**
- Die Hypergeometrische Funktion
- Satz von Shidlovskii

### Definition 5.5

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

heißt **E-Funktion**, falls die Folge $c_n$ der Koeffizienten folgende 3 Bedingungen erfüllt:

**(E1)** Alle $c_n$ sind aus demselben algebraischen Zahlkörper $K$.

**(E2)** Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|\overline{c_n}| = \mathcal{O}(n^{\varepsilon n})$

**(E3)** Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge $(q_n) \subset \mathbb{N}$ natürlicher Zahlen sodass $q_n c_k \in \mathbb{Z}_K$ für $k = 0, \ldots n$ und $q_n = \mathcal{O}(n^{\varepsilon n})$

### Beispiel 5.5

**i)** Jedes Polynom $p \in \mathbb{A}[x]$

**ii)** $e^z$

**iii)** $sin\ z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ mit $c_{2n} = 0$ und $c_{2n+1} = (-1)^n$

## Satz 5.6

Sei **E** die Menge aller E-Funktionen.

**a)** **E** ist ein Ring mit der Addition und Multiplikation

**b)** Sei $f \in \mathbf{E}$. Dann sind auch Ableitung $f'$ und Stammfunktion $z \mapsto \int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t$ E-Funktionen.

**c)** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, die die Bedingungen (E1)-(E3) erfüllen. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \frac{z^n}{n!}$$

eine E-Funktion

**d)** Sei $f \in \mathbf{E}$ und $\alpha$ eine algebraische Zahl. Dann ist auch $z \mapsto f(\alpha z)$ eine E-Funktion.

## Korollar 5.7

Für eine algebraische Zahl $\alpha \in \mathbb{A}$ ist $e^{\alpha z} \in \mathbf{E}$

**Beweis des Satzes:**

- Seien $(a_n) \subset K, (b_n) \subset K'$ Folgen, die die Bedingungen (E1)-(E3) erfüllen. $K, K'$ Zahlkörper.
- Seien $(p_n), (q_n)$ die zu (E3) zugehörigen Folgen, d.h. $p_n a_k \in \mathbb{Z}_K$ und $q_n b_k \in \mathbb{Z}_{K'}$ für $k = 0, \ldots, n$
- zu **a)** (**E** ist Ring)
  - zur Abgeschlossenheit unter Addition:
  - **(E1)** Sei $c_n \stackrel{def}{=} a_n + b_n$. Dann ist $c_n$ eine Folge in $\widehat{K} = \mathbb{Q}(K, K')$.
  - **(E2)** $|\overline{c_n}| \leq |\overline{a_n}| + |\overline{b_n}| = \mathcal{O}(n^{\varepsilon n}) + \mathcal{O}(n^{\varepsilon n}) = \mathcal{O}(n^{\varepsilon n})$
  - **(E3)** Setze $r_n \stackrel{def}{=} p_n q_n$. Dann ist $r_n c_n = p_n a_n + q_n b_n \in \mathbb{Z}_{\widehat{K}}$
  - zudem ist $r_n = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}\varepsilon n}) \cdot \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}\varepsilon n}) = \mathcal{O}(n^{\varepsilon n})$

- zur Abgeschlossenheit unter Multiplikation:
- **(E1)** Sei $c_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (Cauchy-Produkt). Dann ist $c_n \in \widehat{K}$.
- **(E2)** $|\overline{c_n}| \leq \sum_{k=0}^{n} |\overline{a_k}| \cdot |\overline{b_{n-k}}| = n \cdot \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}\varepsilon n}) = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}\varepsilon n+1}) = \mathcal{O}(n^{\varepsilon n})$
- **(E3)** Setze $r_n \overset{def}{=} p_n q_n$. Dann ist $r_n c_n = \sum_{i=0}^{k} p_n a_i + q_n b_{k-i} \in \mathbb{Z}_{\widehat{K}}$

- zu **b)** (Ableitung und Stammfunktion in **E**)

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{z^n}{n!}$$

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \frac{t^{n+1}}{n!}\Big|_0^z = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

- zu **c)** ähnlich wie a).
- zu **d)** setze $a_n = \alpha$ und wende c) an. $\square$

### Definition 5.6 (Pochhammer-Symbol)

$$(\alpha)_0 \overset{def}{=} 1$$
$$(\alpha)_n \overset{def}{=} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$$

### Lemma 5.8

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ und $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$, sei $\xi_k = \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}$, $k \geq 0$ und sei $d_n \in \mathbb{N}$ der Hauptnenner der $\xi_0, \ldots, \xi_n$.

Dann gibt es positive Zahlen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ sodass $|\xi_n| \leq e^{\gamma_1}$ und $d_n \leq e^{\gamma_2}$

## Gliederung

**Definition 5.7 (Hypergeometrische Funktion)**

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n,\ldots,(a_p)_n}{(b_1)_n,\ldots,(b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

**Beispiel 5.9**

**i)** ${}_0F_0(\ \ ;\ \ ;z) = e^z$

**ii)** ${}_0F_1(\ \ ;\frac{1}{2};\frac{-z^2}{4}) = \cos\ z$

**Lemma 5.10**
Seien $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \in \mathbb{Q}$ und $b_j \neq 0, -1, -2, \dots$ und sei $m = q - p + 1 \geq 0$
Dann ist

$$
{}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z^m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n, \dots, (a_p)_n}{(b_1)_n, \dots, (b_q)_n} \cdot \frac{z^{mn}}{n!} \qquad (\star)
$$

eine E-Funktion.

**Beweisidee:**

- $(\star)$ kann geschrieben werden als $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$ mit den Koeffizienten
- $c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \nmid n \\ g_k & \text{falls } n = m \cdot k \end{cases}$
- wobei $g_k = \frac{(a_1)_n, \dots, (a_p)_n}{(b_1)_n, \dots, (b_q)_k} \cdot (mk)! \frac{(k!)^{q-p}}{(k!)^m}$
- Die Brüche $\frac{(a_j)_k}{(b_j)_k}, \frac{k!}{(b_j)_k}$ haben die Form wie in Lemma 5.8.
- Der Faktor $\frac{(mk)!}{(k!)^m} \in \mathbb{Z}$ ist kleiner als $m^{mk}$.
- Deshalb erfüllt $g_k$ die Bedingungen (E2) und (E3). □

## Gliederung

**Satz 5.11 (Satz von Shidlovskii, 1955)**

Seien $f_1, \dots, f_m$ E-Funktionen, die eine Lösung eines Systems von Differentialgleichungen bilden:

$$y_k' = q_{k0} + \sum_{j=1}^{m} q_{kj} y_j, \qquad q_{kj} \in \mathbb{C}(x), \quad k = 1, \dots, m \tag{$\star\star$}$$

Seien diese Funktionen $f_1, \dots, f_m$ zusätzlich algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(x)$

Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0$ und $\alpha$ keine Singularität von ($\star\star$), dass die Zahlen $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

## Korollar 5.12 (Satz von Lindemann-Weierstraß)

Seien $a_0, \ldots, a_m$ algebraische, über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige Zahlen. Dann sind $e^{a_0}, \ldots, e^{a_m}$ algebraisch unabhängig in $\mathbb{Q}$

**Beweis:**

- Sei $f_j(z) = e^{\beta_j z}$.
- Diese Funktionen sind E-Funktionen
- Sie sind Lösungen der Differenzialgleichungen $y_j' = \beta_j y_j$
- Die Funktionen $z^k e^{\gamma_j z}$ sind für verschiedene $(k, \gamma_j)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$.
- Wir müssen noch zeigen, dass die $f_j$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(x)$ sind.
- Angenommen es gäbe $r_{ij} \in \mathbb{C}[x]$ sodass

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} f_j^i \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} e^{\beta_j \cdot z \cdot i} \equiv 0 \;\Rightarrow\; \text{die } \beta_j \text{ sind linear abhängig in } \mathbb{Q}$$

- Mit $\alpha = 1$ liefert uns der Satz von Shidlovskii dann die Behauptung. $\square$

**Bemerkung 5.13**

Diese Formulierung des Satzes von Lindemann-Weierstraß ist äquivalent zu der im vorherigen Vortrag, siehe A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975