8. Konvexe Polytope

Tobias Boelter

TopMath Frühlingsschule

Mittwoch, 5. März 2014

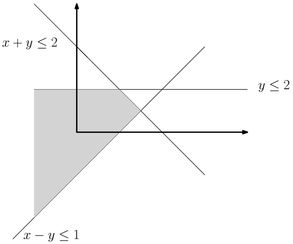
- Es können auch nicht konvexe Polytope untersucht werden, wir beschränken uns hier aber auf konvexe Polytope.
- Mit einem Polytop ist hier deshalb immer ein konvexes Polytop gemeint.
- Polytope sind *„konvexe Mengen mit mehr Struktur“* und haben interessante (Geo)metrische und kombinatorische Eigenschaften
- Polytope spielen z.B. eine wichtige Rolle in der Optimierung (Vorträge 10, 11 morgen)
- Das Thema füllt ganze Bücher:
  - Branko Grünbaum: Convex Polytopes, 1967 (≈450 Seiten)
  - Günter Ziegler: Lectures on Polytopes, 1995, Springer (≈350 Seiten)

Gliederung

Ein **Polyeder** ist der Schnitt endlich vieler Halbräume.

$$P(A, b) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

für eine $m \times n$ Matrix A und $b \in \mathbb{R}^m$



Bemerkung 8.1

Die Polyeder sind genau die Mengen $P(A, b)$, denn jede Ungleichung definiert einen Halbraum. □

Sei C eine konvexe Menge. Ein $z \in C$ heißt **Extrempunkt** von C, falls für alle $x, y \in C$ mit $z \in \overline{xy}$ gilt, dass $x = z = y$

Für den Polyeder $P = P(A, b)$ und $z \in P$ sei A_z die Matrix, die aus den **aktiven** Zeilen besteht, d.h. Zeilen a_i mit $a_i z = b_i$

Satz 8.2

z ist Extrempunkt von $P \Leftrightarrow rang\ A_z = n$

Korollar 8.3

Ein Polyeder hat höchstens $\binom{m}{n}$ Extrempunkte.

Denn $\binom{m}{n}$ ist die Anzahl der $n \times n$ Teilmatrizen von A. $\square$

Beweis des Satzes:

- Sei z ein Extrempunkt. Angenommen $\mathit{rang}\ A_z < n$.
- Dann gibt es ein $c \neq 0 : A_z c = \mathbf{0}$.
- Die Zeilen a_i mit $a_i z < b_i$ gehören nicht zu A_z
- deshalb gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$a_i(z + \delta c) \leq b_i, \quad a_i(z - \delta c) \leq b_i$$

- denn $a_i(z \pm \delta c) = a_i z \pm \delta a_i c$ und entweder $a_i c = 0$ oder $a_i z - b_i > 0$.
- Also $A(z \pm \delta c) \leq b \Rightarrow z \pm \delta c \in P \Rightarrow \overline{z + \delta c, \quad z - \delta c} \subset P$ ↯

- Sei umgekehrt $z \in \overline{xy} \subset P$ mit *rang* $A_z = n$. Es ist zu zeigen, dass $x = z = y$.
- Es ist also $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ mit $\lambda \in (0, 1)$.
- Für eine beliebige Zeile a_i von A_z gilt:

$$\begin{aligned} b_i &= a_i z \\ &= a_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &= \lambda a_i x + (1 - \lambda)a_i y \\ &\leq \lambda b_i + (1 - \lambda)b_i \\ &= b_i \end{aligned}$$

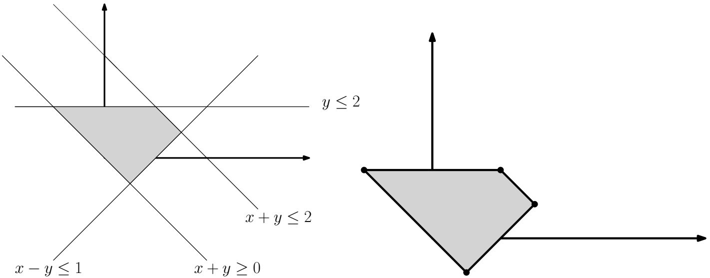
- $\Rightarrow a_i x = b_i$ und $a_i y = b_i$, denn beide Male kann keine echte Ungleichheit gelten.
- $a_i z = b_i$ gilt sowieso
- Da rang $A_z = n$, folgt $x = z = y$

$\square$

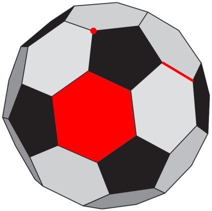
Ein $\mathcal{H}$**-Polytop** ist ein beschränkter Polyeder.

Ein $\mathcal{V}$**-Polytop** ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten.

($\mathcal{H}$ für Hyperplanes, $\mathcal{V}$ für Vertices)



- Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Eine Teilmenge $F \subset S$ heißt **Seite**, falls $F = \emptyset$, $F = S$ oder $F = S \cap H$ für eine Stützhyperebene H.
- $\emptyset$, S heißen **uneigentliche Seiten**, die anderen heißen **echte Seiten**.
- Falls $dim\ F = k$, heißt F eine **k-Seite**.
- 0-Seiten heißen **Ecken**.
- 1-Seiten heißen **Kanten**.
- (n-1)-Seiten heißen **Facetten**.



- Eine Menge von Punkten $\{x_1, \ldots x_k\}$ heißt **minimale Darstellung** des $\mathcal{V}$-Polytops $P = conv\{x_1, \ldots x_k\}$, falls kein x_i überflüssig ist, d.h. $x_i \notin \; conv \bigcup_{j \neq i} x_j$
- Die minimale Darstellung eines $\mathcal{V}$-Polytops existiert immer.
- Der folgende Satz besagt u.a. dass sie Eindeutig ist.

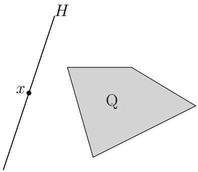
Satz 8.4

Sei $M = \{x_1, \ldots x_k\}$ eine minimale Darstellung von einem Polytop P. Dann sind äquivalent:

i) $x \in M$

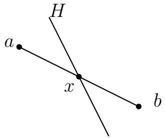
ii) x ist Ecke von P

iii) x ist Extrempunkt von P



Beweis:

- **i)⇒ii)** ($x \in M \Rightarrow x$ ist Ecke von P)
  - Sei $x \in M$.
  - Setze $Q = \text{conv}(M \setminus \{x\})$
  - Dann gibt es eine Hyperebene H, die $\{x\}$ und Q strikt trennt
  - verschiebe diese parallel sodass $x \in H$
  - Q liegt jetzt oBdA in H^+ und deshalb auch $P \subset H^+$
  - H stützt jetzt P an x
  - Weil $H \cap P = \{x\}$ ist x 0-Seite.



- **ii)⇒iii)** (x ist Ecke von $P \Rightarrow x$ ist Extrempunkt von P)
  - Sei H eine Stützhyperebene von P sodass $H \cap P = \{x\}$.
  - Sei $x \in \overline{ab}$ mit $a, b \in P$
  - Da H nicht a und b trennen darf, muss $\overline{ab}$ in H liegen
  - Da dim $H \cap P = 0$ folgt $a = x = b$.
- **iii)⇒i)** (x ist Extrempunkt von $P \Rightarrow x \in M$)
  - Ein Extrempunkt kann nicht als Konvexkombination von zwei anderen Punkten in P dargestellt werden
  - Deshalb muss er in der minimalen Darstellung enthalten sein.

Satz 8.5

Jede echte Seite eines $\mathcal{V}$-Polytops P ist ein $\mathcal{V}$-Polytop und die Anzahl der Seiten ist endlich.

Beweis:

- Sei $P = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$ eine minimale Darstellung von P und $H = [f : \alpha]$ eine Stützhyperebene.
- oBdA sei $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset H$ und $f(x_i) > \alpha$ für $i = r + 1, \ldots, k$.
- Also $f(x_i) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } i = 1, \ldots, r \\ \alpha + \epsilon_i & \text{falls } i = r+1, \ldots, k \end{cases}$ mit $\epsilon_i > 0$

- Sei $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \qquad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1$ ein beliebiger Punkt in P
- Dann ist

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha + \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i (\alpha + \epsilon_i) \\
&= \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{\mathbf{k}} \lambda_i}_{=1} + \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i \underbrace{\epsilon_i}_{>0}
\end{aligned}
$$

- Deshalb gilt

$$
\begin{aligned}
x \in H \cap P &\Leftrightarrow f(x) = \alpha \\
&\Leftrightarrow (\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \text{conv}\{x_1, \ldots, x_r\}
\end{aligned}
$$

- Wir haben also eine injektive Abbildung $\{\textit{Echte Seiten}\} \to \textit{Pot}(x_1, \ldots, x_r)$
- Die Anzahl der Seiten ist deshalb endlich. $\square$

Satz 8.6 (Hauptsatz für Polytope)

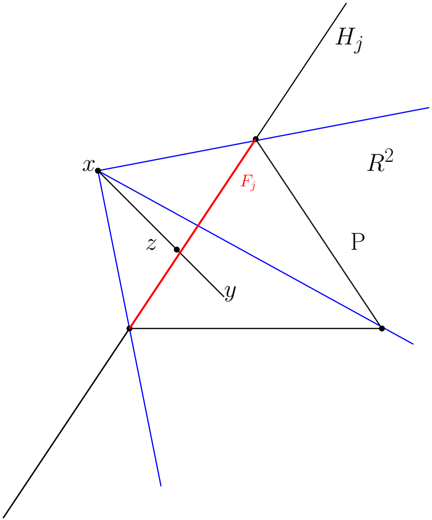
Sei $P \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: P ist ein $\mathcal{H}$-Polytop $\Leftrightarrow$ P ist ein $\mathcal{V}$-Polytop

Beweis:

- Sei P ein beschränkter Polyeder.
- Da P kompakt ist, ist P die konvexe Hülle seiner Extrempunkte.
- Die Anzahl der Extrempunkte von P ist nach Korollar 8.3 endlich.
- Also ist P ein $\mathcal{V}$-Polytop
- Sei umgekehrt P ein $\mathcal{V}$-Polytop und $P = \text{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$ eine minimale Darstellung.
- oBdA sei $\dim P = n$
- Seien $F_1, \ldots, F_m$ die Facetten von P (nach Satz 8.5 endlich) und H_i, H_i^+ die zugehörigen Hyperebenen bzw. abgeschlossenen Halbräume
- d.h. $F_i = H_i \cap P$ und $P \subset H_i^+$
- Wir wollen zeigen, dass $P = H_1^+ \cap \ldots \cap H_m^+$
- Die Inklusion $\subset$ ist klar, da jeweils $P \subset H_i^+$

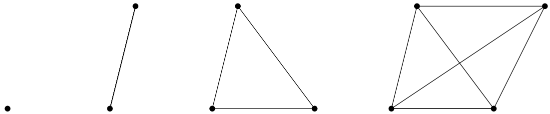
- zu zeigen: $P \supset H_1^+ \cap \ldots \cap H_m^+$
- Angenommen $\exists x \in H_1^+ \cap \ldots \cap H_m^+$ aber $x \notin P$
- Wir setzen $D \stackrel{def}{=} \bigcup_{\substack{B \subset \{x_1, \ldots, x_k\} \\ \#B = n-1}} \mathrm{aff}(\{x\} \cup B)$
- $\dim \mathrm{aff}(B) \leq= n - 2$
- D ist also die endliche Vereinigung von affinen Unterräumen (flats) der Dimension höchstens $n - 1$
- Da $\dim P = n \Rightarrow \mathrm{int}\, P \not\subseteq D$
- Also gibt es einen Punkt $y \in (\mathrm{int}\, P) \setminus D$
- Da $y \in \mathrm{int}\, P$ und $x \notin P$ schneidet die Strecke $\overline{xy}$ den Rand des Polytops in einem Punkt z.
- z muss auf einer Facette von P liegen, denn
- sonst wäre $z \in D$ und damit $\overline{xy} \subset D$ im Widerspruch zu $y \notin D$
- Sei F_j die Facette, die z enthält. Dann ist $z \in H_j$
- Weil $y \in \mathrm{int}\, P \subset H_j^+$, muss x auf der anderen Seite von H_j liegen.
- $\lightning$ zu $x \in H_1^+ \cap \ldots \cap H_m^+$ $\square$

Skizze:



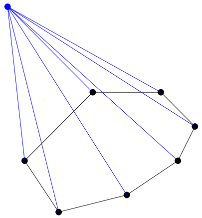
Gliederung

- Ein **k-Simplex** S^k ist ein Polytop mit $k+1$ Ecken und Dimension k.
- Simplices können rekursiv konstruiert werden
- $S^0 = \{x_1\}$
- $S^k = \mathrm{conv}(S^{k-1} \cup \{x_{k+1}\})$ wobei $x_{k+1} \notin \mathrm{aff} S^{k-1}$

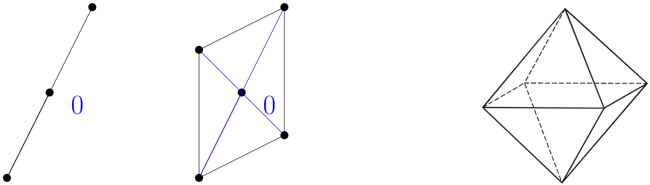


- Jede Seite des S^n ist die konvexe Hülle von ein paar beliebigen Ecken
- Jede k-Seite ist auch ein k-Simplex
- Die Anzahl der k-Seiten von S^n ist damit gegeben durch $\binom{n+1}{k+1}$

- Eine **k-Pyramide** P^k ist die konvexe Hülle eines Polytops der Dimension $k-1$ und einem davon affin unabhängigen Punkt x, genannt die **Spitze**
- Eine Pyramide ist damit eine Verallgemeinerung eines Simplex



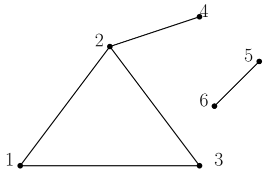
- Seien $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.
- Dann ist $X^k \overset{def}{=} \operatorname{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_k\}$ das **k-Kreuzungspolytop**
- X^1 ist eine Strecke durch 0
- X^2 ist ein Parallelogramm
- X^3 ist ein Oktaeder



Gliederung

- Polyeder und Polytope
- Spezielle Polytope
- **Graphen**
- Eulerformel

- Mit Graphen können wir u.a. die kombinatorische Struktur von Polytopen erfassen
- Ein (einfacher, ungerichteter) **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus endlich vielen **Knoten** V und **Kanten** $E \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$
- Graphen können in die Ebene gezeichnet werden

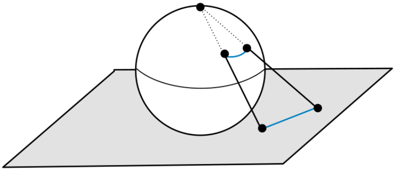


- $V = \{1, \ldots, 6\}$ $\quad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$
- Mit K_n bezeichnen wir den **vollständigen Graphen** auf n Knoten, d.h. $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$

- Eine Folge von Knoten $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ heißt **(x_1, x_k)-Pfad**, falls $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ für $i = 1, \ldots k - 1$.
- Ein (x,x)-Pfad heißt **Kreis** falls kein Knoten zwei Mal durchlaufen wird.
- Ein Dreieck ist z.B. ein Kreis, eine 8 nicht.
- $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x = y$ oder es gibt einen (x,y)-Pfad) ist eine Äquivalenzrelation
- Die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ heißen **Zusammenhangskomponenten**
- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend** falls V eine Zusammenhangskomponente ist.
- Anders gesagt: Wenn zwischen je zwei Knoten ein Weg existiert

- Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen **isomorph** falls es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt, die die Inzidenzen beibehält d.h. $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$.
- Wie können beim Zeichnen von Graphen auch die Beschriftung der Knoten weglassen und damit die Äquivalenzklasse bzgl. Isomorphie ausdrücken.

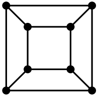
- Ein Graph heißt **planar** falls er so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass sich Kanten nur in den Knoten Kreuzen.
- Kanten sind abei stetige, injektive Wege $\gamma_{\{u,v\}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
- Äquivalent dazu ist, dass der Graph auf die Einheitsspähre S^2 im $\mathbb{R}^3$ gezeichnet werden kann
- Denn $\mathbb{R}^2$ und $S^2 \setminus (0,0,1)$ sind homöomorph (Stereographische Projektion p)



- d.h. p, p^{-1} sind bijektiv, und stetig.
- Wege bleiben damit stetig und es können keine Kreuzungen entstehen (da bijektiv).
- Die Kanten teilen die Ebene bzw. Spähre nach dem Zeichnen in **Regionen** auf.
- Verantwortlich für das Entstehen von Regionen sind Kreise.

- Zu einem Polytop P können wir den **zugehörigen Graphen** $G(P) = (V, E)$ definieren
- Seine Knoten sind die Ecken von P
- und $\{x, y\} \in E$ falls $\operatorname{conv}\{x, y\}$ eine Kante von P ist.
- Beobachtung: $G(P)$ ist immer zusammenhängend

Beispiel 8.7



- Die Graphen von 2-dim Polytopen sind Kreise
- $G(S^k) = K_{k+1}$
- Die Graphen von 3-dim Polytopen sind planar (Beweis später)

- Zwei Polytope heißen **kombinatorisch äquivalent** falls ihre Graphen isomorph sind.

Gliederung

- Sei P ein n-dim Polytop. Wir bezeichnen mit $f_k(P)$ die Anzahl der k-Seiten von P $(0 \leq k \leq n-1)$
- also $f_0(P) = \#$Ecken, $f_1(P) = \#$Kanten,...
- Die **Euler-Charakteristik** von P wird definiert durch

$$\chi(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, f_k(P)$$

Satz 8.8 (Euler-Formel)

$$\chi(P) = 1 + (-1)^{n-1}$$

Beweis:

- Für die vorgestellten Polytope kann man die Formel einfach verifizieren (Buch von S. R. Lay)
- Den allgemeinen Beweis findet man in Grünbaums Buch.
- Wir werden später den Fall $n = 3$ verallgemeinern und beweisen, d.h.

$$\#\text{Ecken} + \#\text{Facetten} = \#\text{Kanten} + 2$$

Satz 8.9

Sei P ein 3-dim Polytop. Dann ist $G(P)$ planar und zusammenhängend. Ecken werden zu Knoten, Kanten zu Kanten und Facetten zu Regionen.

Beweis:

- Wir verschieben P sodass $0 \in \operatorname{rel\,int} P$.
- Jetzt können wir den Rand von P auf die Einheitssphäre injektiv und stetig projizieren durch proj: $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \to S^2, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$
- Die Bilder der Ecken und Kanten können wir dann als Zeichnung von einem Graphen auf die Einheitssphäre auffassen.
- Wegen der injektivität kreuzen sich dabei die Kanten nur in Knoten.
- Wege bleiben stetig.
- Facetten werden dabei zu Regionen.

Satz 8.10 (Euler-Formel)

Sei G ein zusammenhängender, planarer Graph mit E Ecken, K Kanten und R Regionen. Dann gilt $E + R = K + 2$.

Beweis (Induktion über K):

- Sei $K = 0$. Dann gilt $E = 1$ (Zusammenhang) und $R = 1$ $\surd$
- Sei G ein Graph mit K Kanten, E Ecken und R Regionen.
- Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - Falls es keinen Kreis gibt, muss $K = E - 1$ und $R = 1$ gelten. $\surd$
  - Andernfalls können wir eine Kreiskante entfernen
  - Dadurch werden die Regionen, die rechts und links der Kante liegen verbunden.
  - K und R vermindern sich um 1.
  - Die Behauptung folgt durch Induktion. $\square$